从特征值到量子世界

张 瑞

ruizhangmath@icloud.com

闽南师范大学数学与统计学院

2023.03.25

报告提纲

- 报告的**动机**
- **矩阵**特征值与特征向量基本结论
- **量子现象**与**自然界**的本质
- 从**特征值**到**量子力学**

➡ **有限**到**无限**

➡ **有界**到**无界**

➡ **离散**到**连续**

报告动机

我的学生时代

Q：为何**学习**特征值?

Q：为何**计算**特征值?

Q：特征值与**自然界**有何联系?

Q：特征值只在**代数**中有用吗?

Q：当时会算，过一段时间就忘了?

我的教学过程

矩阵特征值基本结论

- 对象：**实对称**矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad A^T = A$
- 特征值：$\lambda_1, \ \lambda_2, \cdots, \ \lambda_s, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}$
- 对角化：$\exists \ P, \ P^T P = E, \ s.t.$

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1}$$

特征值基本结论

- 推广：**对称变换**：$\mathscr{A}: V \longmapsto V$
- 其中：V为**实欧氏空间**, $\dim V = n$
- 特征值：$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}$
- 特征子空间：$V_{\lambda_1}, V_{\lambda_2}, \cdots, V_{\lambda_s}$
- 对角化：存在标准正交基，$\mathscr{A}$ 在此基下的矩阵为：

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

线性变换的角度

$$\mathscr{A}\alpha = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$= (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \langle\alpha, \eta_1\rangle \\ \langle\alpha, \eta_2\rangle \\ \vdots \\ \langle\alpha, \eta_n\rangle \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle\alpha, \eta_i\rangle\eta_i$$

- 定义：$\mathscr{P}_{V_{\lambda_i}} := \langle\alpha, \eta_i\rangle\eta_i$，$\mathscr{P}_{V_{\lambda_i}} : V \longmapsto V_{\lambda_i}$ 为**正交投影**

$$\mathscr{A} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathscr{P}_{V_{\lambda_i}}$$

对称变换可表示为一系列映到**特征子空间**的

正交投影变换的线性组合

线性空间的角度

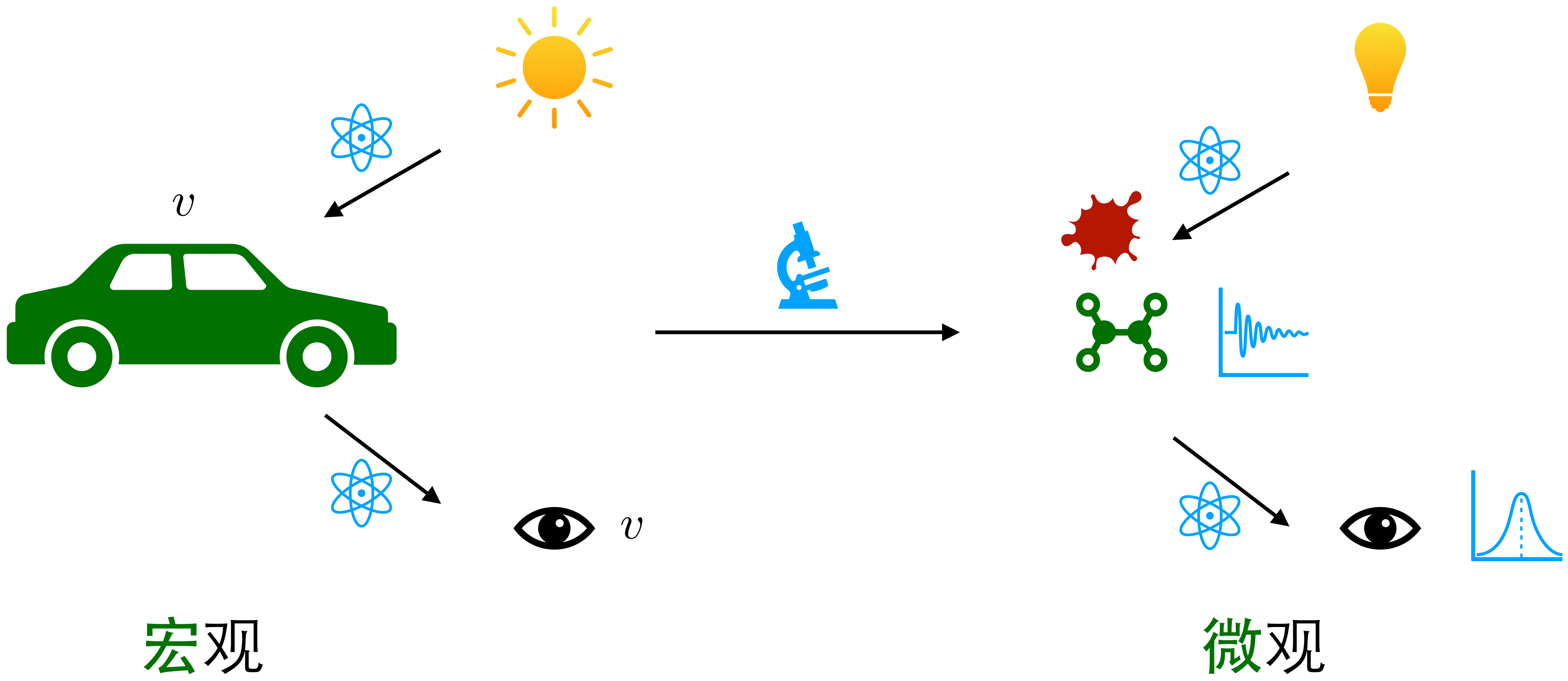
$$
\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\mathscr{A}"] \arrow[d, "\mathscr{U}"'] & V \arrow[d, "\mathscr{U}"] \\
\bigoplus_{i=1}^{n} V_{\lambda_i} \arrow[r, "\mathscr{M}_\lambda"] & \bigoplus_{i=1}^{n} V_{\lambda_i}
\end{tikzcd}
$$

$$\mathscr{A} = \mathscr{U}^{-1}\mathscr{M}_\lambda\mathscr{U}$$

实对称变换**相似**于

“乘积” 变换

量子世界的基本法则



- 状态空间：$\mathcal{H}$ 为Hilbert空间
- 量子系统的状态：$\mathcal{H}$ 中的单位向量，$\psi \in \mathcal{H}$
- 观测：$\mathcal{H}$ 上的无界自伴算子，$\mathscr{A} : \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}$
- 测量值的期望：$\mathbb{E}(\mathscr{A}) := \langle \psi, \mathscr{A} \psi \rangle_{\mathcal{H}}$

- 假设:

$$\mathcal{H} = span\{e_j\}_{j=1}^{\infty},$$

其中: $\{e_j\}_{j=1}^{\infty} \in \mathcal{H}$ 为观测算子 $\mathscr{A}$ 属于特征值 $\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}$ 的标准正交的**特征向量**.

- 对状态 e_j 进行观测，所得结果的期望值为:

$$\langle e_j, \mathscr{A} e_j \rangle = \lambda_j \langle e_j, e_j \rangle = \lambda_j,$$

因此状态 e_j 称为 $\mathscr{A}$ 的**特征状态**.

- 考虑量子状态 $\psi \in \mathcal{H}$:

$$\psi = \sum_{j=1}^{\infty} a_j e_j, \quad a_j = \langle \psi, e_j \rangle.$$

量子状态可表示为**特征状态**的**叠加**——量子叠加态

Q：**观测**后，到底会变成哪种状态?

$$
\begin{aligned}
\langle \psi, \mathscr{A} \psi \rangle &= \langle \psi, \sum_{j=1}^{\infty} a_j \mathscr{A} e_j \rangle = \langle \psi, \sum_{j=1}^{\infty} a_j \lambda_j e_j \rangle \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j a_j \langle \psi, e_j \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^2 \lambda_j .
\end{aligned}
$$

Ans: 观测后，系统将以概率 $|a_j|^2$ 坍缩到特征状态 e_j

即，观测的值为 λ_j 的概率为 $|a_j|^2$.

Q：无限维空间上的线性算子特征值（点谱）未必可数?

能否找到一个**概率测度** μ 使得:

$$\langle \psi, \mathscr{A}\psi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \lambda \mathrm{d}\mu \ ?$$

——量子力学基本问题

从离散到连续

有限维空间
上的对称变换

$$\mathscr{A} = \sum_{i=1}^{n(\infty)} \lambda_i \mathscr{P}_{\lambda_i}$$

V_{λ_i} 上的投影算子

$$\mathscr{A} = \int_{\sigma(\mathscr{A})} \lambda \mathrm{d}\mu^{\mathscr{A}}$$

投影值测度

Hilbert空间
有界自伴算子

$$\langle \psi, \mathscr{A} \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \lambda \mathrm{d}\, \mu_{\psi}^{\mathscr{A}} \longrightarrow \text{概率测度}$$

$$\mu_{\psi}^{\mathscr{A}}(E) := \langle \psi, \mu^{\mathscr{A}}(E) \psi \rangle, \quad \forall E \in \sigma(\mathscr{A}) \subset \mathbb{R}$$

Thank You

for Your Attention!